$\tau(1,1,0) = (1,1,0) = 1v_1 + 1v_2 + 2v_3$
$\tau(0,1,1) = (0,1,1) = 0\cdot v_1 + 2\cdot v_2 + 2v_3$
$\tau(1,0,1) = (1,0,1) = 1\cdot v_1 + 2v_2 + 2v_3$

$$(\tau, S_2, S_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Π.χ. Ποιός είναι ο πίνακας της αλλαγής βάσης από την S_3 στην S_2;

(τ, S_3, S_2)
$\tau(w_1) = (1,0,-1) = 0v_1 - v_2 + 0v_3$
$\tau(w_2) = (0,-1,1) = -v_1 + 0v_2 + 1v_3$
$\tau(w_3) = (0,1,0) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$

$$(\tau, S_3, S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ασκ 2

(ιιι) $\tau: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\tau(x) = ax$
$\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$ βάση
Μια γρ. απεικόνιση καθορίζεται από την εικόνα του 1
$\tau(1) \in \mathbb{R}$, άρα $\tau(1)$ = γρ. συνδ. των στοιχείων της βάσης του $\mathbb{R}$.
$\tau(1) = a\cdot 1 = a$
έστω $x \in \mathbb{R}$ άρα $x = x\cdot 1$, οπότε $\tau(x) = \tau(x\cdot 1)$
$\xRightarrow{\tau \text{ γρ. απ.}} \tau(x) = x\tau(1) \Rightarrow \tau(x) = ax$, μοναδική

(ιv) $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\tau(x,y) = ax + by$
$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$ βάση κ' $\mathbb{R} = \langle 1 \rangle$
Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, τότε $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$
$\xRightarrow{\tau \text{ γρ. απ}} \tau(x,y) = \tau(x(1,0) + y(0,1)) = x\tau(1,0) + y\tau(0,1)$
$= x\cdot a + yb \Rightarrow \tau(x,y) = ax + by$
$\tau(1,0) = 1\cdot a = a$
$\tau(0,1) = 1\cdot b = b$ μοναδική

$\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \tau(x,y) = ax + by$

$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

$\tau(1,0) = a \cdot 1$

$\tau(0,1) = b \cdot 1$

$\tau(x,y) = \tau(x(1,0) + y(0,1)) \overset{\text{γρ}}{=} x\,\tau(1,0) + y\,\tau(0,1) = xa1 + yb1$

3) $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \tau(x,y) = (x, y, x)$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad g(x,y) = (x-y, ay)$

Αρκεί η τ να είναι 1-1 ή επί δίνει $\tau: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\tau(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x+y, x) = (0,0) \Leftrightarrow x+y=0$ κ' $x = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow \ker\tau = \{(0,0)\}$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Το ίδιο.

$g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x-y, ay) = (0,0) \quad x - y = 0, \; ay = 0$

$x = y$ κ' $ay = 0$ → $a \neq 0 \Rightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow g$ 1-1

→ $a = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \ker g = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

όχι 1-1

$T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{R}^2$

$T^{-1}T = 1$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T^{-1}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$

$TT^{-1} = 1$

Η $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ είναι γραμμική

$T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

$(x,y) \quad (ax+by) \quad (a'x+b'y)$

Επειδή η T^{-1} πρέπει να είναι 1-1, $a, b, a', b' \neq 0$

$T^{-1}(T(x,y)) = (x,y)$

$T^{-1}(x+y, y) = (x,y) \Rightarrow T^{-1}(x,0) + T^{-1}(y,y) = (x,y) \Rightarrow (ax, a'x) + ((a+b)y, (a'+b')y) = (x,y)$

$ax + (a+b)y = x$

$a'x + (a'+b')y = y$

$a = 1 \quad a+b = 0 \Rightarrow b = -1$

$a' = 0 \quad a'+b' = 1 \Rightarrow b' = 1$

g $T(2,1) = g(3,1) = (2,a)$

$T^3(1,-2) = T(T(T(1,-2))) =$

4) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad T(x,y) = 4x - y$

$T(1,1) = 3$ κ' $T(1,0) = 4$

$T(x,y) = ax + by$

$T(1,1) = a + b \qquad T(1,0) = a$

$3 = a + b \qquad 4 = a$

$b = -1$

$T(x,y) = 0$

$4x - y = 0$

$y = 4x \qquad \ker T = \{(x,4x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,4) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,4) \rangle$

Βρείτε (x,y) ώστε $T(x,y) = 5$

$T^{-1}\{5\} = \{(x,y) \mid T(x,y) = 5\}$

$4x - y = 5 \Rightarrow y = 4x - 5$

$(x, 4x-5) = x(1,4) + (0,-5)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = f(x)$

$f(\mathbb{R}) = \text{Im} f = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Ποια x χτυπάνε το 5;

Βρες x ώστε $f(x) = 5 \Leftrightarrow f^{-1}\{5\}$

$f(x) = x^2$

$T: V^n \to W^m$ γρ. απ.

Διατεταγμένη βάση $S_1 \to$ Διατεταγμένη βάση S_2

$\langle w_1, \dots, w_m \rangle$

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Ορίζεται ο πίνακας της T ως προς τις βάσεις S_1 κ' S_2.

$A = (T, S_1, S_2)$

Ο πίνακας αυτός έχει στήλες τους συντελεστές των διανυσμάτων

$T(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m$

για όλα τα i

στήλη

Πίνακας αλλαγής βάσης

Ο πίνακας αλλαγής βάσης είναι ειδική περίπτωση του προηγούμενου όταν η γρ. απεικ. T είναι η ταυτοτική.

Π.χ. $\mathbb{R}^3 = \langle (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1) \rangle$ S_2

$\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,-1), (0,-1,1), (0,1,0) \rangle$ S_1

u_1 u_2 u_3

Θέλουμε τους πίνακες αλλαγής βάσης

$(1, S_2, S_1)$ κ' $(1, S_3, S_2)$

$1(v_1) = v_1 = u_1 + u_2 + 2u_3$

$1(v_2) = v_2 = u_2 + 2u_3$

$1(v_3) = v_3 = u_1 + 2u_2 + 2u_3$

$$(1, S_2, S_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$1(u_1) = u_1 = v_1 - v_2$

$1\cdot(u_2) = u_2 = -v_1 + v_3$

$1\cdot(u_3) = u_3 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{2} v_3$

$$(1, S_3, S_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{1} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{1} \mathbb{R}^3$$

$$S_2 \xrightarrow[(1,S_2,S_3)]{} S_3 \xrightarrow[(1,S_3,S_2)]{} S_2$$

Ταυτοτικός:

$1v_1 - 0v_2 + 0v_3$

$0v_1 + 1v_2 + 0v_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1, S_2, S_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (1, S_3, S_2)^{-1}$$

$$(1, S_3, S_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (1, S_2, S_3)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2 \xrightarrow{(1,S_2,S_3)} S_3$$

$v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(1, S_2, S_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$v_2 =$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{S_3}$

$v_3 =$

$1u_1 + 1u_2 + 2u_3$

σαν στήλη

π.χ. Δίνεται η $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ με τύπο

$T(x,y) = (x-3y,\ 2x+y,\ x+y,\ x-5y)$

Να βρεθούν (T, S_1, S_1'), (T, S_2, S_2') κι $T(S_2, S_1')$

$(1,0)\ (0,1)$

Όπου S_1 είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

S_2 είναι η $<(1,-1),(2,1)>$

$(1,0,0,0)(0,1,0,0)(0,0,1,0)(0,0,0,1)$

S_1' είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$

S_2' είναι η $<(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,0,0,1)>$

$T(1,0) = (1,2,1,1) = 1(1,0,0,0) + 2(0,1,0,0) + 1(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1)$

$T(0,1) = (-3,1,1,-5) = -3(1,0,0,0) + (0,1,0,0) + 1(0,0,1,0) - 5(0,0,0,1)$

$$(T, S_1, S_1') = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}_{4\times 2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$T(1,-1) = (4,1,0,6) = \alpha_1(1,1,0,0) + \beta_1(0,1,1,0) + \gamma_1(0,0,1,1) + \delta_1(1,0,0,1)$

$T(2,1) = (-1,5,3,-3) = \alpha_1'(\ ) + \beta_1'(\ ) + \gamma_1'(\ ) + \delta_1'(\ )$

$4 = \alpha_1 + \delta_1 \Rightarrow 4 = 1 + \cancel{\gamma_1} + 6 - \cancel{\gamma_1} \Rightarrow 0 = 3$

$1 = \alpha_1 + \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1 - \beta_1 = 1 + \gamma_1$

$0 = \beta_1 + \gamma_1 \Rightarrow \beta_1 = -\gamma_1$

$6 = \gamma_1 + \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = 6 - \gamma_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$